

## Les fonctions logarithmiques

Prof. Smail BOUGUERCH

### La fonction logarithme népérien:

#### Définition :

La fonction logarithme népérien, notée  $\ln$  (ou  $\log_e$ ), est la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1

#### Déductions et propriétés:

$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$	$\forall x \in ]0; +\infty[$ et $\forall y \in ]0; +\infty[$ $\ln xy = \ln x + \ln y$ $\ln x^r = r \ln x ; (r \in \mathbb{Q})$ $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$ $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
$\forall x \in ]0; +\infty[$ et $\forall y \in ]0; +\infty[$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y</math></li> <li><math>\ln x &gt; \ln y \Leftrightarrow x &gt; y</math></li> </ul>		
$\forall x \in ]0; +\infty[$ et $\forall y \in \mathbb{R}$ <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y</math></li> </ul>		

Si  $n$  est pair, alors  $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \ln x^n = n \ln |x|$

#### Le Domaine de définition:

La fonction $f$ est définie comme suit :	Son domaine de définition est :
$f(x) = \ln x$	$D_f = ]0; +\infty[$
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u \text{ et } u(x) > 0\}$

#### Les limites:

##### Limites principales

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

##### Déductions

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln[u(x)] = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \ln[u(x)] = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)]}{[u(x)]^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^n \ln[u(x)] = 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)]}{u(x)-1} = 1$
$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[u(x)+1]}{u(x)} = 1$

Ces limites sont toujours valables lorsqu'on les traite soit à droite ou à gauche de  $x_0$  ou bien au voisinage de  $+\infty$  ou  $-\infty$

**La continuité:**

La fonction  $x \mapsto \ln x$  est continue sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

Si  $u$  est strictement positive et continue sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $x \mapsto \ln[u(x)]$  est continue sur l'intervalle  $I$

**La dérivabilité:**

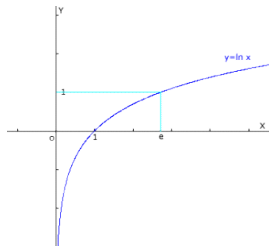
La fonction  $x \mapsto \ln x$  est dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  et on a :

$$\forall x \in ]0; +\infty[ ; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Si  $u$  est strictement positive et dérivable sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $x \mapsto \ln[u(x)]$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et on a :

$$\forall x \in I ; (\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

**La représentation graphique:**



**signe de ln :**

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

**La fonction logarithme de base  $a$  avec  $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$  :**

**Définition:**

La fonction logarithme de base  $a$  est la fonction notée :  $\log_a$   
 tel que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

**Cas particulier:** la fonction  $\log_{10}$  est la fonction logarithme décimal et on la note  $\log$

**Déductions et propriétés:**

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$	$\forall x \in ]0; +\infty[$ et $\forall y \in ]0; +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\log_a x^r = r \log_a x$ $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\forall x \in ]0; +\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$ $\log_a x = r \Leftrightarrow x = a^r$	

**Limites et inéquations:**

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$	$\log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$

**La dérivée:**

$$\forall x \in ]0; +\infty[ ; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$